Leçon 260 - Espérance, variance et moments de variables aléatoires.

Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Définitions et premières propriétés. —

1. Espérance d'une variable aléatoire. —

–

2. Espérances de lois usuelles. —

–

3. Espérance conditionnelle. —

–

2. Moments d'une variable aléatoire. —

1. Moment d'ordre 2, variance et covariance. —

–

2. Lien avec l'indépendance. —

–

3. Moments d'ordre p. —

–

3. Utilisation des moments. —

1. Série génératrice. —

–

- **Dev** : Processus de Galton-Watson : Soient $X_{n,k}$ des v.a iid de loi discrète sur $\mathbb{N}$, intégrables. On définit la suite de v.a. (Z_n) par $Z_0 := 1$ et $Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$. Alors la probabilité d'extinction $a := P(\{existsn$ tq $Z_n = 0\})$ vaut 1 si $E[X_{0,0}] < 1$ ou si $P(X_{0,0} = 1) = 1$ et est dans $[0, 1[$ si $E[X_{0,0}] \geq 1$ et $P(X_{0,0} = 1) < 1$.

2. Fonction caractéristique et transformée de Laplace. —

–

- **Dev** : (Liens entre fonction caractéristique et moments) Soit X une v.a. réelle et φ_X sa fonction caractéristique.
  Si X admet un moment d'ordre k, alors φ_X est de classe C^k, avec $\varphi_X^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{iXt}]\ \forall t \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, Si φ_X est de classe C^k, alors X a un moment d'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.
- Cor : Si X a un moment d'ordre n, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} E[X^n . \int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{ituX} du]$.

3. Convergence. —

–

- **Dev** : Théorème de Lévy : X_n converge en loi vers X ssi φ_{X_n} converge simplement vers φ_X.
- Théorème Central de la Limite : Soit X_n une suite de v.a. réelles iid ayant un moment d'ordre 2. Alors la suite $\frac{X_1 + .. + X_n - nE[X_1]}{\sqrt{var(X_1)n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Références

Barbe, Ledoux :
Ouvrard (Probas 1) : Processus de Galton-Watson.(Dev)(incomplet)
Ouvrard (Probas 2) : Fonction caractéristique et moments d'une v.a.(Dev)
Zuily, Queffélec : Théorème de Lévy+TCL.(Dev)

June 3, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes